

Tekintsük a  $\mathbb{K}^2$ -et az  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$  skaláris szorzattal, továbbá legyen  $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ ;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  pedig ortonormált bázis  $\mathbb{K}^2$ -ben.

Bizonyítandó, hogy  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$  bilineáris alak.

Minden alább megadott  $\varphi$  esetén eldöntendő, hogy az előbbi konstrukcióval megadott  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  bilineáris alak Hermite-féle-e; pozitív válasz esetén meghatározandó a  $Q(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  kvadratikus alak jellege, negatív válasz és  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  esetén pedig keresendő nem valós  $Q(\mathbf{x})$  érték.

- |    |   |  |
|----|---|--|
| a) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$ | $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2;$  |
| b) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$  | $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2;$   |
| c) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1,$                 | $\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2;$                 |
| d) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2,$                 | $\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1;$                 |
| e) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$  | $\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2;$ |
| f) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2,$                 | $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1;$                  |
| g) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1,$                | $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2;$                  |
| h) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$  | $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2;$   |
| i) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$ | $\varphi(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2;$ |
| j) | $\varphi(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,$ | $\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2.$ |