1. *Előzetes becslés:* Ha x elég nagy abszolút értékű, akkor bal oldalt $2|x|$-hez közeli érték lesz, ami lényegesen nagyobb $x+3$-nál, vagyis $\mathbb{R}$-ből elég egy korlátos halmazt eltávolítanunk, hogy megoldást kapjunk.

Válasszunk szét három esetet.

I. Ha $x \leq 1$, akkor

$$1 - x + 2 - x > x + 3,$$

$$-2x > x,$$

vagyis $x < 0$.

II. Ha $1 \leq x \leq 2$, akkor

$$x - 1 + 2 - x > x + 3,$$

$$1 > x + 3,$$

vagyis $x < -2$, ez azonban ellentmondás.

III. Ha $x \geq 2$, akkor

$$x - 1 + x - 2 > x + 3,$$

$$2x - 3 > x + 3,$$

vagyis $x > 6$, amit az I. esettel uniózva $\boxed{x < 0 \vee x > 6}$ adódik mint megoldás.

2. *Előzetes becslés:* Ha x elég nagy abszolút értékű, akkor bal oldalt $\sqrt{2}|x|$-hez közeli érték lesz, ami lényegesen nagyobb $x+2$-nél, tehát – hasonlóan az előző feladathoz – most is elég a számegyenesről egy korlátos halmazt kiradírozni, hogy megoldást leljünk.

A gyök alatti másodfokú mennyiség diszkriminánsa $1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (8) = -63 < 0$, ezért nincs zérushelye, tehát értelmezett minden valós x-re.

Ha $x < -2$, akkor jobb oldalt negatív érték lép fel, ami biztosan kisebb a bal oldali négyzetgyökértéknél.

Ha $x \geq -2$, (*) akkor négyzetre emelhetünk:

$$2x^2 - x + 8 > x^2 + 4x + 4,$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0,$$

ahonnan $x < 1 \vee x > 4$, amit (*) feltétellel metszve $-2 \leq x < 1 \vee x > 4$ adódik, viszont ehhez uniózzuk az $x < -2$ esetet, tehát a megoldás $\boxed{x < 1 \vee x > 4}$.

3. Ha $y = \log_7 x$ helyettesítést alkalmazunk, akkor

$$y + (-2y) = \frac{y}{2} - 3,$$

$$-y = \frac{y}{2} - 3,$$

$$3 = \frac{3y}{2},$$

végül $\log_7 x = y = 2$ adódik, s mivel a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, azért $x = 49$.

4. A feladat feltételei szerint x hegyesszög, vagyis biztosan nem lesz egyik nevező sem 0. Szorozzuk meg az egyenletet $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$-szel:

$$\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x = 24 \sin^2 x \cos^2 x$$

ahonnan a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ és $\sin 2\alpha = 2\sin x \cos x$ azonosságok alapján

$$1 + \sin 2x = 6\sin^2 2x,$$

s innen $y = \sin 2x$ helyettesítéssel

$$1 + y = 6y^2,$$

$$0 = 6y^2 - y - 1,$$

amelynek gyökei $y = -\frac{1}{3} \vee y = \frac{1}{2}$, azonban előbbi elvetendő, mivel $0 < 2x < \pi$, ilyen számnak pedig pozitív szinusza van, azonban ha $\sin 2x = \frac{1}{2}$, akkor $2x = \frac{\pi}{6} \vee 2x = \frac{5\pi}{6}$, ahonnan $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$.

5. Írjuk fel az

$$y = \frac{7x+4}{3x+2}$$

egyenletet, majd az y paraméter függvényében oldjuk meg x-re:

$$y(3x+2) = 7x + 4,$$

$$3xy - 7x = 4 - 2y,$$

$$x(3y - 7) = 4 - 2y.$$

Ha $y = \frac{7}{3}$, akkor bal oldalt 0, jobb oldalt pedig $-\frac{2}{3}$ adódik, ami ellentmondást. Ha y különbözik ettől a kritikus értéktől, akkor viszont

$$x = \frac{4-2y}{3y-7},$$

azonban mivel az eredeti függvény értelmezési tartományában csak $-\frac{2}{3}$-nál nagyobb számok megengedettek, azért

$$\frac{4-2y}{3y-7} + \frac{2}{3} = \frac{3(4-2y) + 2(3y-7)}{3(3y-7)} = \frac{-2}{3(3y-7)} < 0,$$

ha $y > \frac{7}{3}$, az inverz tehát:

$$f^{-1}(x) = \frac{4-2x}{3x-7};\ x > \frac{7}{3}.$$

6. Valamely 0 és 2 közti x-re a téglalap kerülete $2x + 2(4 - x^2)$, ami rendezve $-2x^2 + 2x + 8$, amely egy másodfokú kifejezés negatív főegyütthatóval, amiért is szélsőértéke maximum, melynek helye $x^* = -\frac{2}{2\cdot(-2)} = \frac{1}{2}$, amit az $y = 4 - x^2$ kifejezésbe helyettesítve $y^* = \frac{15}{4}$, téglalapunk oldalai tehát $a = \frac{1}{2} \wedge b = \frac{15}{4}$.

7. Mivel $x_1 = \sqrt{6} > 0 = x_0$, sejtésünk az, hogy a sorozat szigorúan növekvő. Tegyük fel, hogy n-ig igaz az $x_n < x_{n+1}$ állítás. Ehhez 6-ot adva

$$x_n + 6 < x_{n+1} + 6, \text{ majd gyököt vonva}$$

$$\sqrt{x_n + 6} < \sqrt{x_{n+1} + 6}$$

adódik, de bal oldalt x_{n+1}, jobb oldalt pedig x_{n+2} áll, ezzel az állítást beláttuk, s mivel a sorozat szigorúan növekvő, nulladik tagja (ami 0) alsó becslés az összes tagra.

Sorozat első tagja $\sqrt{6}$, ami 5-nél kisebb. Tegyük fel most, hogy n-ig igaz az $x_n < 5$ állítás, ekkor $x_n + 6 < 11$, ahonnan

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{11} < \sqrt{25} = 5,$$

vagyis az 5 valóban felső becslés.